

Министерство науки и высшего образования

Российской Федерации

**Братский педагогический колледж**

федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования

«Братский государственный университет»

**Методические рекомендации**

**По дисциплине**

**Математика**

**«Методические рекомендации теория множества и операции над ними»**

**для студентов 2 курса**

**очной формы обучения**

**специальности 44.02.01 Дошкольное образование**

Автор: В.А. Савкина

**Братск, 2024**

Методические рекомендации к зачету по учебной дисциплине «Математика» для студентов для специальности среднего профессионального образования44.02.01 Дошкольное образование «Общеобразовательный цикл» / Сост. ВА. Савкина –Братск: БПК ФГБОУ ВО «БрГУ»,2024г. - 20с.

Методические рекомендации по учебной дисциплине «Математика» для студентов всех форм обучения содержат лекционный ипрактический материал по подготовке к зачету

Печатается по решению научно –методического совета Братского педагогического колледжа ФГБОУ ВО «БрГУ»665709, г. Братск, ул. Макаренко,40

Содержание

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | страница |
| 1 | Введение | 4 |
| 2 | Понятие множества | 4 |
| 3 | Операции над множествами и их свойства | 7 |
| 4 | Подмножества | 11 |
| 5 | Числовые множества | 11 |
| 6 | Диаграммы Венна | 13 |
| 7 | Отображение множеств | 15 |
| 8 | Мощность | 16 |
| 9 | Литература | 18 |

**1. Введение**

В современной математике и в различных ее приложениях фундаментальную роль играет понятие множества. Понятие множества, в так называемой наивной теории множеств, является исходным не определяемым строго понятием. Приведем “наивное” пояснение понятия «множество». Георг Кантор (G.Cantor, 1845-1918) – немецкий математик, основатель теории множеств, писал: «Под многообразием или множеством я понимаю вообще все многое, которое возможно мыслить, как единое, т.е. такую совокупность определенных элементов, которая посредством одного закона может быть соединена в одно целое» Например, можно говорить о множестве студентов в группе, о множестве натуральныхчисел, множестве букв в алфавите и т.д. При этом о множестве можно вести речь только тогда, когда элементы множества различимы между собой. Обозначение: A, B, C, … X, Y…. В современной математической литературе также представлены аксиоматические теории множеств, в которых понятие множества строго определяется посредством набора аксиом, но при этом используются уже другие неопределяемые понятия.

## 2.Понятие множества.

Множество – это фундаментальное понятие не только математики, но и всего окружающего мира. Возьмите прямо сейчас в руку любой предмет. Вот вам и множество, состоящее из одного элемента. Элементами множества называют отдельные объекты, из которых состоит множество. Обозначение: a, b, c, … x, y…. Для указания того, что некоторый элемент x является элементом множества X, используют символ ∈ принадлежности множеству: x ∈ X. Запись x ∉ X означает, что элемент x не принадлежит множеству X. Приняты следующие стандартные обозначения числовых множеств: N — множество натуральных чисел; Z — множество целых чисел; Q — множество рациональных чисел; R — множество действительных чисел; C — множество комплексных чисел. Рассмотрим способы задания конкретных множеств — перечисление, рекурсия и описание. Перечисление соответствует записи в фигурных скобках всех элементов множества через запятую.

Пример 1.

Y = {a, b, с} — множество, состоящее из элементов a, b, c, d; X = {2,4,6,8…} — такая запись применима, если вполне ясно, что понимается под многоточием. При рекурсивном задании множество задается перечисляющей процедурой (алгоритмом).

Пример 2.

Множество натуральных чисел N задаем следующими правилами: задаём исходный элемент: 1 ∈ N, задаём алгоритм: n ∈ N ⇒ (n+1) ∈ N, устанавливаем правило замыкания: других элементов, кроме построенных по предыдущим двум правилам, в N нет. Очевидно, что способ задания множества путем непосредственного перечисления элементов применим не для любого множества. Приведем наиболее общий способ задания множеств. Описание состоит в том, что указывается характерное свойство, которым обладают все элементы описываемого множества. Пусть Р(х) — утверждение, состоящее в том, что элемент х обладает свойством Р. Тогда множество всех элементов х, обладающих свойством Р, записывают следующим образом: Х = {x: Р(x)}.

Пример 3.

A = {а: а — четное} — множество четных чисел; B = {b: b2 –1=0} — множество корней уравнения b2 –1=0; Y = {у: 0< y ≤7} есть множество целых чисел от 1 до 7. Важным понятием теории множеств является понятие пустого множества.

Определение 1

Пустым множеством называется множество, не содержащее ни одного элемента. Обозначение: Ø. Рассмотрим отношения на множествах — равенство и включение.

Определение 2

Два множества A и В называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Обозначение: A=B. Пример 4.

Пусть A = {3,4,5,6}, B = {4,5,6,3}. Тогда A=B. Таким образом, множество полностью определяется своими элементами.

Определение 3

Множество B называется подмножеством или частью множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A. Обозначение: B ⊆ A (нестрогое включение). Из определения 3 следует, что два множества A и В называются равными, если А ⊆ В и B ⊆ A. Таким образом, чтобы доказать равенство множеств, требуется установить два включения. Если B ≠ Ø, B ⊆ A и B ≠ A, то говорят, что B есть собственное подмножество A. Обозначение: B ⊂ A (строгое включение).

Пример 5.

Пусть B = {1,2,3}, тогда {1,2}, {2,3}, {3,1}, {1}, {2}, {3} — собственные подмножества множества B; для числовых множеств справедливы включения: N⊂Z⊂Q⊂R⊂C, причем каждое из множеств есть собственное подмножество каждого последующего. Для всякого множества может быть образовано множество его подмножеств. В число подмножеств множества A входит, как это ясно из определения 3, само это множество: ∀А ⊆ A. Кроме того, в теории множеств постулируется, что пустое множество есть подмножество любого множества: ∀А Ø ⊆ A.

Определение 4

Множество всех подмножеств множества А называется множеством-степенью или булеаном. Обозначение: 2А или P(А). Таким образом, 2А = {Х: Х ⊆ А} или P(А) = {Х: Х ⊆ А}. Отметим, что образование булеана 2А позволяет определять следующие булеаны: A 2 2, A2 2 2 и так далее.

Пример 6.

Пусть B = {1,2,3}. Тогда его булеан Р(B)= {{1,2,3}, {1,2}, {2,3}, {3,1}, {1}, {2}, {3}, Ø}. Для того чтобы перейти к операциям над множествами, введем понятие универсальное множество.предположим, что все рассматриваемые в ходе какого-то рассуждения множества являются подмножествами некоторого множества. Тогда это множество называют универсальным или универсумом для данного рассмотрения. Например, если мы рассматриваем только различные числовые множества, то универсальным можно считать множество всех действительных чисел R.

**3.Операции над множествами и их свойства.**

Рассмотрим способы получения новых множеств из уже существующих, а именно: Объединение, пересечение множеств; Разность, симметрическая разность множеств; Дополнение множества до универсального. Пусть А и В — произвольные множества.

Определение.4

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B. Обозначение: A∪B. Итак, A∪B = {x: x∈A или x∈B}. Объединение множеств иногда называют суммой множеств и обозначают A+B.

Пример 7.

Пусть A= {1,2,3,4}, B = {2,4,6,7}. Тогда A∪B = {1,2,3,4,6,7}. Графическое представление универсального множества в виде прямоугольника позволяет наглядно представить операции над множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна, где подмножества универсального множества изображают в виде кругов, расположенных внутри прямоугольника. Объединение n множеств A1, A2, …, An есть множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств. Обозначение: A1 ∪ A2 ∪ … ∪An = Υ n i Ai =1 Операция объединения множеств обладает следующими свойствами: 1. A∪B = B∪A — коммутативность, 2. (A∪B)∪C = A∪(B∪C) — ассоциативность, 3. A∪Ø = A, 4. A∪A = A — идемпотентность, A∪I = I.

Замечание. В соответствии со свойством 3, пустое множество в алгебре множеств относительно операции объединения играет роль, аналогичную роли числа 0 в обычной числовой алгебре относительно операции сложения. Перейдем к следующей операции.

Определение 5

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B. Обозначение: A∩B. Итак, A∩B = {x: x∈A и x∈B}.

Пример 8.

A = {1,2,3,4,5}, B = {2,4,6,7}. Тогда A∩B = {2,4}. Обобщим операцию пересечения множеств. Пересечение n множеств A1, A2, …, An есть множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит всем этим множествам. Обозначение: A1 ∩ A2 ∩… ∩ An = Ι n i Ai =1 Операция пересечения множеств обладает следующими свойствами: а) A∩B = B∩A, б). (A∩B) ∩C = A∩(B∩C), в) A∩A = A, г) A∩Ø = Ø, д) A∩I = A. В англоязычной литературе символы ∪ и ∩ называют cap (шляпа).

Определение 6

Множества A и Bназываются непересекающимися, если они не имеют общих элементов. Следовательно, А и В — непересекающиеся ⇔ A∩B = Ø).

Пример 9.

Пусть A = {1,2,3}, B= {4,5,6}. Тогда A∩B = Ø. Рассмотрим взаимосвязь между операциями объединения и пересечения:Законы дистрибутивности: A∩(B∪C) = (A∩B) ∪ (A∩C) – дистрибутивность ∩ относительно ∪, A∪(B∩C) = (A∪B) ∩ (A∪C) – дистрибутивность ∪ относительно ∩.Законы поглощения: A∪(B∩A) = A, A∩(B∪A) = A. A∩B = Определим следующую операцию.

Определение 7

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат A, но не принадлежат B. Обозначение: A \ B. Итак, A \ B = {x: x∈A и x∉B}. В соответствии с определениями 6 и 8, разность множеств определяется равенством: A \ B = A ∩ B.

Пример10.

ПустьA = {1,2,3,4,5}, B= {2,4,6,7}. ТогдаA\B = {1,3,5}; B\A = {6,7}. Отметим, что разность множеств A \ B определена только для двух множеств, причем как в случае, когда множество В является подмножеством А, так и в случае, когда В не содержит общие с А элементы. Введем еще одну операцию на множествах, непосредственно связанную с операцией разности.

Определение8

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат B, или принадлежат множеству В, но не принадлежат А. Обозначение: A Δ B. Итак, A Δ B = {x: (x∈A и x∉B) или (x∈В и x∉А)}. В соответствии с определениями 5 и 8, симметрическая разность множеств A и B определяется равенством: A Δ B = (A \ B) ∪ (B \ A). В примере A Δ B = {1,3,5} ∪ {6,7} = {1,3,5,6,7}. Симметрическая разность A Δ B обозначена штриховкой Операция симметрической разности множеств обладает следующими свойствами: а). A Δ B = B Δ A, б). (A Δ B) Δ C = A Δ (B Δ C), в). A Δ B = (A∪B) \ (A∩B); г). A∩(BΔC) = (A∩B) Δ(A∩C) – дистрибутивность ∩ относительно Δ. Зафиксируем универсальное множество I и определим следующую теоретико-множественную операцию. Определение.9

Дополнением (абсолютным дополнением) множества A до универсального называется множество всех элементов универсального множества, не принадлежащих A. Обозначение: A. Итак, A = {x: x∈I и x∉A}. В соответствии с определением6, дополнение множества А до универсального определяется равенством: A = I \ A.

Пример11.

Зафиксируем в качестве универсального множество I = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Пусть A = {1,2,3,4,5}. Тогда A = {0,6,7,8,9}. Дополнение множества А до универсального обозначено штриховкой. Операция дополнения обладает следующими свойствами: а). A∪A = I, б). A ∩ A = ∅, в). Закон двойного отрицания: A = A, Законы де Моргана: A∪ B = A∩ B, A ∩ B = A ∪ B. Замечание. Можно показать, что любая из определенных выше операций выражается через операции пересечения и дополнения множества до универсального. Таким образом, мы рассмотрели способы получения новых множеств из уже имеющихся путем применения теоретико-множественных операций. Каждое из равенств верно для любых подмножеств A, B, C универсального множества I. Они называются теоретико-множественными тожествами или основными тождествами алгебры множеств. Существуют следующие методы доказательства теоретико-множественных тождеств: метод двух включений, метод эквивалентных преобразований, метод характеристических функций. Метод двух включений основан на том, что для того, чтобы доказать равенство A=В, необходимо и достаточно доказать два включения: А ⊆ В и B ⊆ A. Любое из тождеств может быть доказано методом двух включений. Докажем один из законов де Моргана: A∪ B = A∩ B. Пусть x ∈ A∪ B. Тогда х∈I и х∉А∪В. Следовательно, х∉А и х∉В. Отсюда x ∈ A и x ∈B, а значит, x ∈ A ∩ B. Итак, A ∪ B ⊆ A ∩ B. Пусть теперь x ∈ A ∩ B. Тогда x ∈ A и x∈ B. Следовательно, х∈I и х∉А и х∉В. Значит, x∉ A∪ B т.е. x∈ A∪ B. Итак, A∩ B ⊆ A∪ B. Из того, что выполняются два включения A∪ B ⊆ A∩ B и A∩ B ⊆ A∪ B следует, что A∪ B = A∩ B. Метод эквивалентных преобразований состоит в том, что при доказательстве преобразовывают левую часть тождества к правой и наоборот, используя ранее доказанные тождества. Этот метод считается универсальным и наиболее часто применяемым методом доказательства теоретико-множественных тождестви буквы, цифры, теоремы, мысли, эмоции и т. д.

Обычно множества обозначаются большими латинскими буквамиA, B, C…X, Y, Z, кроме того, в теории и на практике рассматривается так называемоепустое множество:– множество, в котором нет ни одного элемента.

Следует отметить, что элементы множества не обязаны быть «однородными» или логически взаимосвязанными. Возьмите большой пакет и начните наобум складывать в него различные предметы. В этом нет никакой закономерности, но, тем не менее, речь идёт о множестве предметов. Образно говоря, множество – это и есть обособленный «пакет», в котором «волею судьбы» оказалась некоторая совокупность объектов.

**4. Подмножества**

Практически всё понятно из самого названия: множество G является подмножеством множества*A*, если каждый элемент, множества G принадлежит множествуA, иными словами, множество g содержится во множестве, A. Значок ⊂ называю значком включения.

Также можно выделить подмножество согласных букв и вообще – произвольное подмножество, состоящее из любого количества случайно (или неслучайно) взятых кириллических букв. В частности, любая буква кириллицы является подмножеством множестваA.

Отношениямежду подмножествами удобно изображать с помощью условной геометрической схемы, которая называетсякругами Эйлера.Типичный пример включений мы наблюдаем при рассмотрениичисловых множеств.

**5. Числовые множества**

Как известно, исторически первыми появились натуральные числа, предназначенные для подсчёта материальных объектов (людей, кур, овец, монет и т. д.). Дело в том, что числовые множества принято обозначать жирными, стилизованными или утолщёнными буквами.

Совершенно понятно, что множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел: N⊂Z – поскольку каждый элемент множестваN принадлежит множеству Z таким образом, любое натуральное число можно смело назвать и целым числом.

Название множества тоже «говорящее»: целые числа – это значит, никаких дробей.

И коль скоро целые, то сразу же вспомним важные признаки их делимости на 2, 3, 4, 5 и 10, которые будут требоваться в практических вычислениях

Целое число делится на 2 без остатка, если оно заканчивается на 0, 2, 4, 6 или 8 (т. е. любой чётной цифрой). Например, числа:400, -1502, -24, 66996, 818 – делятся на 2 без остатка.

Разберём «родственный» признак: целоечисло делится на 4, есличисло, составленное из двух его последних цифр (в порядке их следования), делится на 4.

400 – делится на4(т.к. 00 (ноль) делится на 4);

1502 – не делится на 4(т. к. 02(двойка) не делится на 4);

24 - понятно, делится на 4;

66996 – делится на 4(т. к. 96делится на 4);

818 – не делится на 4(т. к. 18 не делится на 4).

С делимостью на 3 чуть сложнее: целое число делится на 3 без остатка, еслисумма входящих в него цифрделится на 3. Проверим, делится ли на3 число27901. Для этого просуммируем его цифры:2 +7+9+0+1 =19,19 – не делится на 3.

Вывод: 27901 не делится на 3.

Просуммируем цифры числа -825432:8+2+5+4+3+2=24

24-делитсяна 3

Вывод: число-825432 делится на3Целое число делится на 5, если оно заканчивается пятёркой либо нулём: 775, -2390 – делятся на 5

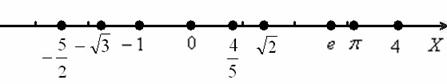
Целое число делится на 10, если оно заканчивается на ноль: 798400 – делится на 10(и, очевидно, на 100). Ну и, наверное, все помнят – для того, чтобы разделить на 10, нужно просто убрать один ноль: 79840

Также существуют признаки делимости на 6, 8, 9, 11 и т. д., строго доказываются в теории чисел.

В высшей математике все действия стремимся выполнять в обыкновенных (правильных и неправильных) дробях

Помимо рациональных существует множествоLиррациональных чисел, каждое из которых представимо в виде бесконечнойНепериодическойдесятичной дроби. Иными словами, в «бесконечных хвостах» иррациональных чисел нет никакой закономерности.

Геометрическая интерпретация множества– это числовая прямая:



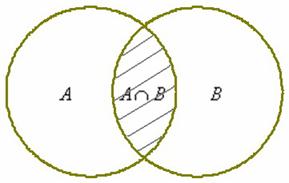
Каждому действительному числу соответствует определённая точка числовой прямой, и наоборот – каждой точке числовой прямой обязательно соответствует некоторое действительное число. По существу, сейчас сформулированосвойство непрерывностидействительных чисел, которое хоть и кажется очевидным, но строго доказывается в курсе математического анализа.

Числовую прямую также обозначают бесконечным интервалом. С вложениями всё прозрачно: множество рациональных чисел – это подмножество множества действительных чисел: таким образом, любое рациональное число можносмело назвать и действительным числом.

Множество иррациональных чисел – это тоже подмножество действительных чисел.

**6.Диаграммы Венна**

Диаграммы Венна (по аналогии кругами Эйлера) – это схематическое изображение действий с множествами. Пересечение множеств характеризуется логической связкой Или обозначается значком ∩.

Пересечением множеств А и B называется множество A ∩B, каждый элемент которого принадлежит множеству А, имножеству В. Пересечение – это общая часть множеств:  


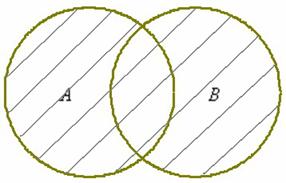
Если у множеств нет одинаковых элементов, то их пересечение пусто.

Множества рациональных и иррациональных чисел можно схематически изобразить двумя непересекающимися кругами.

Операция пересечения применима и для большего количества множеств.

Объединениемножеств характеризуется логической связкойИЛИи обозначается значком ∪

Объединением множеств А и В называется множество каждый элемент которого принадлежит множеству А или множеству В:

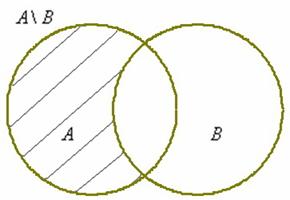


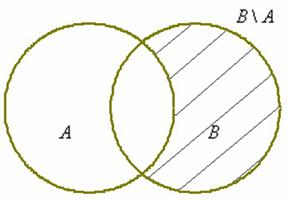
Причём одинаковые элементы (в данном случае единица на пересечении множеств*)* следует указать один раз.

Но множества, разумеется, могут и не пересекаться, как это имеет место быть с рациональными и иррациональными числами:

В этом случае можно изобразить два непересекающихся заштрихованных круга.

Операция объединения применима и для большего количества множеств, при этом числа вовсе не обязательно располагать в порядке возрастания.

Разностью множеств А и В называют множество, каждый элемент которого принадлежит множеству А ине принадлежит множеству В:



А вот эта разность оказывается пуста И в самом деле – если из множества натуральных чисел исключить целые числа, то,

**7. Отображение множеств**

Отображение множества A во множествоB – это правило, по которому каждому элементу множестваAставится в соответствие элемент (или элементы) множества. В том случае если в соответствие ставится единственный элемент, то данное правило называется однозначно определённой функцией или простофункцией.

В данном примере это означает, чтокаждомустуденту поставлена в соответствие одна уникальная тема реферата, и обратно – за каждой темой реферата закреплён один и только один студент.

Bвзаимно-однозначное соответствие пропадёт – либо один из студентов останется без темы(отображения не будет вообще), либо какая-то тема достанется сразу двум студентам. Обратная ситуация: если к множествуTдобавить седьмую тему, то взаимно однозначностьотображения тоже будет утрачена – одна из тем останется невостребованной.

Теперь разберёмся со «школьной» функцией одной переменной

Это правило, которое каждому элементу x области определения *(*в данном случае это все значения «икс») ставит в соответствие единственное значениеx. С теоретико-множественной точки зрения, здесь происходит отображение множества действительных чисел во множество действительных чисел:

Первое множество мы называем «иксами» (независимая переменная или аргумент), а второе – «игреками» (зависимая переменная или функция).

Далее взглянем на старую знакомую[параболу](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html)y=x2. Здесь правило каждому значению «икс»ставит в соответствие его квадрат, и имеет место отображение.

Итак, что же такое функция одной переменной? Функция одной переменной – это правилo, котороекаждомузначению независимой переменнойxизобластиопределенияставит в соответствие одно и только одно значениеy

Как уже отмечалось в примере со студентами, не всякая функция является взаимно-однозначной. Так, например, у функции yкаждому «иксу»области определения соответствует свойуникальный«игрек», и наоборот – по любому значению «игрек» мы сможем однозначно восстановить «икс». Таким образом, это биоактивная функция.

**8.Мощность**

Мощность множества этотермин характеризует размер множества, а именно количество его элементов

Мощность пустого множества равна нулю.

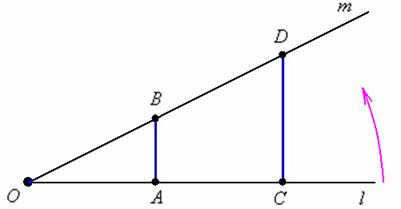
Мощность множества букв русского алфавит равна тридцати трём. И вообще – мощность любогоконечног*о*множества равно количеству элементов данного множества.

Само собой, множества можно сравнивать по мощности и их равенство в этом смысле называетсяравномощностью. Равномощность определяется следующим образом:

Два множества являются равномощными, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Множество А студентов равномощно множеству тем рефератов, множество А букв русского алфавита равномощно любому множеству из 33 элементов и т. д. Гораздо более просто обстоят дела с бесконечными множествами. Бесконечности тоже бывают разными. Самые «маленькие» бесконечные множества — это счётныемножества. Если совсем просто, элементы такого множества можно пронумеровать. Эталонный пример – это множество натуральных чисел.

Поскольку между множеством R и числовой прямой существует взаимно-однозначное соответствие то множество точек числовой прямой тоже несчётно. И более того, что на километровом, что на миллиметровом отрезке

– точек столько же! Классический пример:  
  
Поворачивая луч l против часовой стрелки до его совмещения с лучом m установим взаимно-однозначное соответствие между точками синих отрезков. Таким образом, на отрезке AB столько же точек, сколько и на отрезке СД

**Литература**

**Основные источники:**

1. Балдин К. В. Основы теории вероятностей и математической статистики: учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев; под общ. ред. К. В. Балдина. – 5-е изд., стер. – Москва: ФЛИНТА, 2021. – 489с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=500648>. – Библиограф.: с. 460-461. – ISBN 978-5-9765-2069-1.
2. Барсукова Л. В. Геометрия: практикум / Л.В. Барсукова – Минск: РИПО, 2020. – 106 -с.: ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=599715> . – Библиограф. в кн. – ISBN 978-985-7234-14-1.
3. Балдин К. В. Высшая математика: учебник: [16+] / К.В. Балдин, В.Н.Башлыков, А.В. Рукосуев; под общ. ред. К. В. Балдина. – 3-е изд., стер. – Москва: ФЛИНТА, 2021. – 360 с.: табл., граф., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=79497>
4. Клово А. Г. Курс лекций по математике: учебное пособие: [16+] / А.Г. Клово, И.А. Ляпунова; Южный федеральный университет. – Рустов-на-Дону; Таганрог: Южный федеральный университет, 2020. – 199 с.: ил., граф. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=612217>.
5. Мельников Е. В. Математический анализ: теория и практика: учебное пособие: в 3 частях: [16+] / Е.В. Мельников, Е.А. Мещеряков; Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского. – Омск: Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского (ОмГУ), 2021. – Часть 2. – 232 с.: ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=688739>.
6. Скафа Е. И. Методика обучения математике: эвристический подход. Общая методика: учебное пособие: [16+] / Е.И. Скафа. – Изд. 2-е. – Москва: Директ-Медиа, 2022. – 441 с.: ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL:<https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=695311>

**Дополнительные источники:**

1. Грацианова Т. Ю. Программирование в примерах и задачах: учебное пособие: [12+] / Т.Ю. Грацианова. – 6-е изд. (эл.). – Москва: Лаборатория знаний, 2020. – 373 с.: ил., табл., граф. – (ВМК МГУ — школе). – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=448048>.
2. Профессионально-педагогическое образование: состояние и перспективы: сборник статей по материалам VI Международной студенческой научно-практической конференции (г. Махачкала, 28.04.2022) / под ред. М. В. Гамзаевой, Р. Р. Алиевой; Дагестанский государственный педагогический университет. – Москва: Директ-Медиа, 2022. – 388 с.: ил., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=691108> – Библиограф. в кн. – ISBN 978-5-4499-3267-9. – DOI 10.23681/691108.
3. Паневина О. А. Общие методы решения уравнений в школьном курсе математики / О.А. Паневина; Воронежский государственный педагогический университет, Физико-математический факультет, Кафедра информатики и методики преподавания математики. – Воронеж: б.и., 2019. – 67 с.: табл., ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=578048>.
4. Пинус А. Г. Основы универсальной алгебры: учебное пособие: [16+] / А.Г. Пинус; Новосибирский государственный технический университет. – 4-е изд., перераб. и доп. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2019. – 184 с.: ил., табл. – (Учебники НГТУ). – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=576461>

.

**Интернет-ресурсы:**

1. Вся математика в одном месте. Режим доступа: [http://www.allmath.ru 16.04.2024].
2. Математика – это просто. Режим доступа: [http://easymath.com.ua 16.04.2024].
3. Математика. Режим доступа: [http://www.mathematics.ru 12.05.2023].
4. Прикладная математика: справочник математических формул. Режим доступа: [<http://www.pm298.ru/> 12.04.2024].